PHƯƠNG PHÁP U, V, T, W
PHÂN TÍCH NHÂN TỬ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

(Bùi Thế Việt - Chuyên gia Thủ Thuật CASIO)

A. Giới thiệu

Tôi (Bùi Thế Việt) tham gia diễn đàn từ hồi lớp 8. Khi đó, tôi vô cùng thắc mắc vì sao các anh chị giải đề thi đại học lại có thể giải quyết những bài toán về PTVT, BPT, HPT, ... một cách nhanh gọn như đặt ẩn phụ hợp lý, nhóm nhân tử, lấy $PT(1) + kPT(2)$, ... Từ đó, tôi tự mày mò nghiên cứu và đã có nhiều phương pháp, thủ thuật CASIO hỗ trợ quá trình giải toán. Ví dụ như lớp 9 tôi đăng lên diễn đàn thủ thuật giải phương trình bậc 4, rút gọn biểu thức, chia biểu thức, ... nhanh chóng bằng CASIO; lớp 10 đăng thủ thuật phân tích nhân tử, chia biểu thức chứa căn, S.O.S chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm, giải BĐT bằng CASIO, ...

Cũng nhờ một thời chém mưa chém gió trên diễn đàn, tôi đã trưởng thành hơn nhiều, và trong kỳ thi THPT Quốc Gia 2015, tôi đã được trọn vẹn 10 điểm môn toán (82/900.000 người được điểm 10). Giờ tôi đã là sinh viên năm nhất, và cũng là giáo viên trung tâm luyện thi Vted.vn của anh Đặng Thành Nam. Vậy mà đến tận bây giờ, tôi mới quay trở lại diễn đàn. Muốn làm một gì đó mơi mới, tôi muốn giới thiệu cho bạn đọc phương pháp U, V, T, W để giải phương trình vô tỷ dạng một căn và nhiều căn thức ...

B. Ý tưởng

Bạn đọc đã bao giờ thắc mắc làm thế nào mà có thể phân tích được nhân tử thành như sau :

$$a) x^3+3x+2-x^2\sqrt{2x^2-x-1} = \left(x+1-\sqrt{2x^2-x-1}\right)\left(\sqrt{2x^2-x-1}+x^2+x+1\right)$$
$$b)\ 6x-1-(4x-1)\sqrt{1-x}-2(x+1)\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+1}-1\right)^2$$

Đối với một số người tư duy tốt, họ sẽ hỳ hục ngồi nháp, tách đủ kiểu để sao có nhân tử chung rồi đi nhóm nhân liên hợp. Tuy nhiên, với những người lười tư duy như tôi hoặc như một phần không nhỏ các bạn khác, chúng ta cần một công cụ hỗ trợ việc phân tích nhân tử như trên. Đó là chiếc máy tính CASIO hoặc VINACAL mà chắc hẳn bạn đọc nào cũng có.

Để làm được điều như trên, tôi chia bài toán thành 3 giai đoạn :

Bước 1: Tìm nhân tử

Bước 2: Chia biểu thức

Bước 3: Tiếp tục tìm nhân tử (nếu còn) hoặc đánh giá vô nghiệm.

Cụ thể chi tiết từng phần, tôi sẽ trình bày ở dưới.

Tuy nhiên U, V, T, W mà là gì ? U, V, T, W không hẳn là một phương pháp, mà đây là một công thức để thực hiện bước 2 - chia biểu thức. Đây cũng chính là mấu chốt cho việc phân tích thành nhân tử bằng CASIO.

C. Yêu cầu

Đối với một số bạn đọc chưa biết nhiều về CASIO, vui lòng xem qua bài viết này hoặc xem video này hoặc tài liệu PDF chi tiết hơn ở đây. Cụ thể, thứ chúng ta cần bao gồm :

- Rút gọn biểu thức bằng CASIO
- Tìm các nghiệm bằng CASIO
- Kỹ năng sử dụng CASIO như CALC, STO, ENG, ...
- Làm việc với số phức trong Mode 2 CMPLX

D. Thực hiện

Chúng ta sẽ lần lượt đi qua từng giai đoạn của Ý Tưởng trên :

Phần 1: Tìm nhân tử :

Làm thế nào để tìm được nhân tử ? Làm sao để biết $x^3+3x+2-x^2\sqrt{2x^2-x-1}$ có nhân tử $\left(x+1-\sqrt{2x^2-x-1}\right)$???

Phương pháp tìm nhân tử đơn giản như sau :

Nếu nhân tử có nghiệm $x=x_0$ thì phương trình ban đầu cũng có nghiệm $x=x_0$ Vậy thì nếu chúng ta biết phương trình ban đầu có nghiệm $x=x_0$ thì sẽ tìm được nhân tử chứa nghiệm $x=x_0$ ấy.

Ví dụ: Phương trình $x^3+3x+2=x^2\sqrt{2x^2-x-1}$ có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

Khi đó $\sqrt{2x^2-x-1}=\sqrt{\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}=x+1$ suy ra nhân tử là $\left(\sqrt{2x^2-x-1}-x-1\right)$

Vấn đề cần được giải quyết ở đây gồm :

- Làm thế nào để tìm được nghiệm lẻ như $x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$
- Làm thế nào biến đổi nhanh chóng $\sqrt{\dfrac{21+5\sqrt{17}}{2}}=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$
- Làm thế nào để tìm được nhân tử khi biết nghiệm hữu tỷ ?

Nhờ quá trình mày mò, nghiên cứu dựa theo ý tưởng trên, tôi đã xây dựng được thủ thuật tìm nhân tử cho phương trình vô tỷ như sau :

- Một căn thức $f(x)+g(x)\sqrt{h(x)}=0$
- Nhiều căn thức $U\sqrt{p(x)}+V\sqrt{q(x)}+T\sqrt{p(x)q(x)}+W=0$

Bước 1: Viết biểu thức. Ấn Shift + SOLVE, tìm các nghiệm (nếu có) và lưu vào A, B, C, ...

Bước 2: Xét các trường hợp nghiệm

TH1: Phương trình có ít nhất 2 nghiệm vô tỷ k_1,k_2 sao cho $\begin{cases} k_1+k_2\in\mathbb{Q} \\ k_1k_2\in\mathbb{Q}\end{cases}$ hoặc ít nhất 2 nghiệm hữu tỷ $k_1,k_2\in\mathbb{Q}$

Khi đó nhân tử sẽ là :

$\left(\sqrt{h(x)}+ax+b\right)$ với $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{h(k_1)}-\sqrt{h(k_2)}}{k_1-k_2} \\ b=-\sqrt{h(k_1)}-bk_1\end{cases}$

$\left(\sqrt{p(x)} + a\sqrt{q(x)} + b\right)$ với $\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{p(k_1)} - \sqrt{p(k_2)}}{\sqrt{q(k_1)} - \sqrt{q(k_2)}} \\ b = -\sqrt{p(k_1)} - a\sqrt{q(k_1)} \end{cases}$

TH2: Phương trình có 1 nghiệm vô tỷ k_1 hoặc có 1 nghiệm hữu tỷ k_1.

Xét phương trình đổi dấu $f(x) - g(x)\sqrt{h(x)} = 0$ hoặc đối với dạng nhiều căn là :

- $-U\sqrt{p(x)} + V\sqrt{q(x)} - T\sqrt{p(x)q(x)} + W = 0$
- $U\sqrt{p(x)} - V\sqrt{q(x)} - T\sqrt{p(x)q(x)} + W = 0$
- $-U\sqrt{p(x)} - V\sqrt{q(x)} + T\sqrt{p(x)q(x)} + W = 0$

Nếu phương trình này có thêm nghiệm vô tỷ k_2 sao cho $\begin{cases} k_1 + k_2 \in \mathbb{Q} \\ k_1k_2 \in \mathbb{Q} \end{cases}$ hoặc 1 nghiệm hữu tỷ $k_2 \in \mathbb{Q}$

Khi đó nhân tử sẽ là :

$\left(\sqrt{h(x)} + ax + b\right)$ với $\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{h(k_1)} + \sqrt{h(k_2)}}{k_1 - k_2} \\ b = -\sqrt{h(k_1)} - ak_1 \end{cases}$

$\left(\sqrt{p(x)} + a\sqrt{q(x)} + b\right)$ với $\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{p(k_1)} + m\sqrt{p(k_2)}}{\sqrt{q(k_1)} + n\sqrt{q(k_2)}} \\ b = -\sqrt{p(k_1)} - a\sqrt{q(k_1)} \end{cases}$

- Nếu k_2 sinh ra từ phương trình đổi dấu $\sqrt{p(x)}$ thì $m = 1$ và $n = -1$.
- Nếu k_2 sinh ra từ phương trình đổi dấu $\sqrt{q(x)}$ thì $m = -1$ và $n = 1$.
- Nếu k_2 sinh ra từ phương trình đổi dấu $\sqrt{p(x)q(x)}$ thì $m = 1$ và $n = 1$.

TH3: Phương trình đổi dấu không tìm được k_2 thỏa mãn điều kiện trên. Chúng ta sẽ xem xét nó ở phần nâng cao.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$x^3 - x^2 + 5 = x\,(x-2)\,\sqrt{2\,x^2 - 1}$$

Bước 1: Nhập $x^3 - x^2 + 5 - x\,(x-2)\,\sqrt{2\,x^2-1}$ và tìm các nghiệm, ta được 2 nghiệm là $k_1 = 5$ và $k_2 = -1$.

Bước 2: Nhân tử $\left(\sqrt{2\,x^2-1} + ax + b\right)$ với $\begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{h(k_1)} - \sqrt{h(k_2)}}{k_1 - k_2} = -1 \\ b = -\sqrt{h(k_1)} - ak_1 = -2 \end{cases}$

Kết luận: Nhân tử là $\left(\sqrt{2\,x^2-1} - x - 2\right)$

Ví dụ 2: Giải phương trình:

$$(2\,x+5)\,\sqrt{x-1} - (3\,x-5)\,\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3}\sqrt{x-1} + 4\,x - 11 = 0$$

Bước 1: Nhập $(2\,x+5)\,\sqrt{x-1} - (3\,x-5)\,\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3}\sqrt{x-1} + 4\,x - 11$ và tìm các nghiệm, ta được 2 nghiệm là $k_1 = 12.166563$ và $k_2 = 1.433436$

Bước 2: Nhân tử $\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+3}+b\right)$ với $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{p(k_1)}-\sqrt{p(k_2)}}{\sqrt{q(k_1)}-\sqrt{q(k_2)}}=-\dfrac{3}{2} \\ b=-\sqrt{p(k_1)}-a\sqrt{q(k_1)}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Kết luận: Nhân tử là $\left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+3}+5\right)$

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$4\,x^3-6\,x+3=\left(2\,x^2+3\,x-4\right)\sqrt{2\,x^2-1}$$

Bước 1: Nhập $4\,x^3-6\,x+3=\left(2\,x^2+3\,x-4\right)\sqrt{2\,x^2-1}$ và tìm các nghiệm, ta được 3 nghiệm là $k_1=3.2247448$ và $k_2=-1.724744$ và $k_3=1$

Bước 2: Thành thử thấy $k_1+k_2\notin\mathbb{Q}$ Tất cả các nghiệm rơi vào **TH2**

Tìm nghiệm phương trình

$$4\,x^3-6\,x+3+\left(2\,x^2+3\,x-4\right)\sqrt{2\,x^2-1}=0$$

Ta được 3 nghiệm là $k_4=0.7247448$ và $k_5=0.775255$ và $k_6=-1$

Thành thử thấy $\begin{cases} k_1+k_5\in\mathbb{Q} \\ k_2+k_4\in\mathbb{Q} \end{cases}$

Vậy phương trình này có 3 nhân tử $\left(\sqrt{2\,x^2-1}+ax+b\right)$ với $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{h(k_1)}+\sqrt{h(k_5)}}{k_1-k_5}=-2 \\ b=-\sqrt{h(k_1)}-ak_1=2 \end{cases}$ và tương tự cho các cặp (k_2,k_4) và (k_3,k_6)

Kết luận: Nhân tử là $\left(\sqrt{2\,x^2-1}-2x+2\right)$ và $\left(2\sqrt{2\,x^2-1}+2x-1\right)$ và $\left(\sqrt{2\,x^2-1}-x\right)$

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$11\sqrt{2\,x-1}-7\sqrt{3\,x+1}-5\sqrt{2\,x-1}\sqrt{3\,x+1}+10\,x+5$$

Bước 1: Nhập $11\sqrt{2\,x-1}-7\sqrt{3\,x+1}-5\sqrt{2\,x-1}\sqrt{3\,x+1}+10\,x+5$ ta được 2 nghiệm là $k_1=5$ và $k_2=0.549157...$

Bước 2: Đổi dấu trước căn:

- $-11\sqrt{2\,x-1}-7\sqrt{3\,x+1}+5\sqrt{2\,x-1}\sqrt{3\,x+1}+10\,x+5=0$ có nghiệm $k_3=1$.
- $11\sqrt{2\,x-1}+7\sqrt{3\,x+1}+5\sqrt{2\,x-1}\sqrt{3\,x+1}+10\,x+5=0$ vô nghiệm.
- $11\sqrt{2\,x-1}+7\sqrt{3\,x+1}+5\sqrt{2\,x-1}\sqrt{3\,x+1}+10\,x+5=0$ có nghiệm $k_4=2.330842...$

Vậy áp dụng công thức với (k_1,k_3) và (k_2,k_4) ta được nhân tử dạng $\left(\sqrt{p(x)}+a\sqrt{q(x)}+b\right)$ với

- $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{p(k_1)}+\sqrt{p(k_3)}}{\sqrt{q(k_1)}-\sqrt{q(k_3)}}=-2 \\ b=-\sqrt{p(k_1)}-a\sqrt{q(k_1)}=5 \end{cases}$
- $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt{p(k_2)}+\sqrt{p(k_4)}}{\sqrt{q(k_2)}+\sqrt{q(k_4)}}=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\sqrt{p(k_2)}-a\sqrt{q(k_2)}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Kết luận: Nhân tử là $\left(\sqrt{2x-1}-2\sqrt{3x+1}+5\right)$ và $\left(2\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x+1}+1\right)$

Nhận xét: Có lẽ bước tìm nhân tử này quyết định tới hướng đi của bài toán. Chúng ta có thể nhờ nhân tử tìm được này để nhóm hợp lý trong phương pháp nhân liên hợp hoặc đặt ẩn phụ. Bạn đọc có thể tự mình tìm lời giải cho 4 bài toán trên nhờ các nhân tử tìm được.

Nhiều bạn có suy nghĩ "trẻ trâu", bài nào cũng đi bình phương khử căn thức nên nghĩ rằng tìm nhân tử vừa khó vừa lâu. Lâu hay không là còn do độ phức tạp của bài toán và chứng minh phần còn lại vô nghiệm, còn bình phương khử căn thức chưa chắc đã giải quyết được bài toán. Bạn đọc có thể xem ví dụ dưới đây:

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$2x^3-4x^2+x-3=\left(x^2-3x+1\right)\sqrt{x^2+3}$$

Cách 1: Bình phương khử căn thức:

Ta có:

$$\begin{aligned}
&2x^3-4x^2+x-3=(x^2-3x+1)\sqrt{x^2+3}\\
&\Rightarrow (2x^3-4x^2+x-3)^2=(x^2-3x+1)^2(x^2+3)\\
&\Leftrightarrow 3x^6-10x^5+6x^4+4x^3-9x^2+12x+6=0\\
&\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-4x-2)(x^3-3x^2+3x-3)=0
\end{aligned}$$

Tuy nhiên, giải quyết $x^3-3x^2+3x-3=0$ thế nào được ?

Bật mí: $x^3-3x^2+3x-3=(x-1)^3-2$ và nghiệm của nó không thỏa mãn PTVT.

Đây là một bài cơ bản để tôi lấy ví dụ. Vậy điều gì xảy ra nếu tôi cho một phương trình sau khi bình phương nó có thêm nghiệm cực xấu hoặc hệ số của nó cực to ? Phương pháp sau sẽ tối ưu hơn:

Cách 2: Phân tích nhân tử :

Ta có:

$$PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+3}-2x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x^2-x\right)=0$$

Và $\sqrt{x^2+3}+x^2-x\geq\sqrt{3}+x^2-x>0$

Cách làm này rất ngắn và "ảo diệu". Vậy thì làm thế nào tìm được nhân tử còn lại khi biết một vài nhân tử của bài toán ? Tôi sẽ giới thiệu cho bạn đọc công thức U, V, T, W để chia biểu thức:

Phần 2: Chia biểu thức:

Dạng 1: Một căn thức:

Xét phép chia hết sau: $\dfrac{f(x)+g(x)\sqrt{h(x)}}{p(x)+q(x)\sqrt{h(x)}}=U+V\sqrt{h(x)}$

Công thức U, V:

Đặt $A=\dfrac{f(x)+g(x)\sqrt{h(x)}}{p(x)+q(x)\sqrt{h(x)}}$ và $B=\dfrac{f(x)-g(x)\sqrt{h(x)}}{p(x)+-q(x)\sqrt{h(x)}}$. Khi đó:

$$\begin{cases}U=\dfrac{A+B}{2}\\ V=\dfrac{A-B}{2\sqrt{h(x)}}\end{cases}$$

Áp dụng:

Bước 1: Viết biểu thức, CALC cho $X = 1000$. Ấn Shift + STO + A (gán vào A)

Bước 2: Sửa biểu thức, đổi dấu trước căn, CALC cho $X = 1000$. Ấn Shift + STO + B (gán vào B)

Bước 3: Sử dụng công thức U, V để tìm U và V theo x.

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức:

$$\frac{4\,x^5 - 2\,x^4 - 8\,x^2 + 2\,x + 2 - (6\,x^3 - 7\,x^2 - 1)\sqrt{2\,x^3 - 1}}{\sqrt{2\,x^3 - 1} + 2 - 3\,x}$$

Bước 1: CALC cho $X = 1000$ và lưu vào A ta được $A = 8.9397997... \cdot 10^{10}$

Bước 2: Đổi dấu, CALC cho $X = 1000$ và lưu vào B ta được $B = -8.9397995... \cdot 10^{10}$

Bước 3: Ta có: $\begin{cases} U = \dfrac{A+B}{2} = 2001 = 2x+1 \\ V = \dfrac{A-B}{2\sqrt{2x^3-1}} = 1999000 = 2x^2 - x \end{cases}$

Đáp số: $2x + 1\left(2\,x^2 - x\right)\sqrt{2\,x^3 - 1}$

Dạng 2: Nhiều căn thức:

Xét phép chia hết sau :

$$\frac{A_1\sqrt{p(x)} + B_1\sqrt{q(x)} + C_1\sqrt{p(x)q(x)} + D_1}{A_2\sqrt{p(x)} + B_2\sqrt{q(x)} + C_2\sqrt{p(x)q(x)} + D_2}$$
$$= 1U\sqrt{p(x)} + V\sqrt{q(x)} + T\sqrt{p(x)q(x)} + W$$

Công thức U, V, T, W:

Đặt:

- $A = \dfrac{A_1\sqrt{p(x)} + B_1\sqrt{q(x)} + C_1\sqrt{p(x)q(x)} + D_1}{A_2\sqrt{p(x)} + B_2\sqrt{q(x)} + C_2\sqrt{p(x)q(x)} + D_2}$
- $B = \dfrac{-A_1\sqrt{p(x)} + B_1\sqrt{q(x)} - C_1\sqrt{p(x)q(x)} + D_1}{-A_2\sqrt{p(x)} + B_2\sqrt{q(x)} - C_2\sqrt{p(x)q(x)} + D_2}$
- $C = \dfrac{A_1\sqrt{p(x)} - B_1\sqrt{q(x)} - C_1\sqrt{p(x)q(x)} + D_1}{A_2\sqrt{p(x)} - B_2\sqrt{q(x)} - C_2\sqrt{p(x)q(x)} + D_2}$
- $D = \dfrac{-A_1\sqrt{p(x)} - B_1\sqrt{q(x)} + C_1\sqrt{p(x)q(x)} + D_1}{-A_2\sqrt{p(x)} - B_2\sqrt{q(x)} + C_2\sqrt{p(x)q(x)} + D_2}$

Khi đó:

- $U = \dfrac{A - B + C - D}{4\sqrt{p(x)}}$
- $V = \dfrac{A + B - C - D}{4\sqrt{q(x)}}$
- $T = \dfrac{A - B - C + D}{4\sqrt{p(x)q(x)}}$
- $W = \dfrac{A + B + C + D}{4}$

Ví dụ minh họa:

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức :

$$\frac{4\,x^5-2\,x^4-8\,x^2+2\,x+2-(6\,x^3-7\,x^2-1)\sqrt{2\,x^3-1}}{\sqrt{2\,x^3-1}+2-3\,x}$$

Bài toán này không CALC cho $X=1000$ được vì không thỏa mãn ĐKXĐ. Tuy nhiên, chúng ta có thể CALC cho $X=0.0001$ hoặc vào MODE 2 CMPLX (complex) và CALC cho $X=1000$.

Bước 1: Vào MODE 2 CMPLX

Bước 2: Nhập biểu thức, CALC cho $X=1000$ và ta lưu vào A ta được $A=31604.945-1031.605i$

Bước 3: Sửa biểu thức, đổi dấu $\sqrt{x+1}$ lưu vào B ta được $B=-31608.945+968.392i$.

Bước 4: Sửa biểu thức, đổi dấu $\sqrt{1-x}$ lưu vào C ta được $C=31604.945+1031.606i$.

Bước 5: Sửa biểu thức, đổi dấu $\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{1-x}$ và lưu vào D ta được $D=-31608.945-968.392i$.

Bước 6: Sử dụng công thức U, V, T, W :

- $U=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{x+1}}=999=x-1$
- $V=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{1-x}}=-1$
- $T=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{1-x^2}}=-1$
- $W=\dfrac{A+B+C+D}{4}=-2$

Đáp số: $(x-1)\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}-2$

Vậy là bây giờ, nếu chỉ cho phương trình, bạn đọc có thể phân tích nhân tử được chứ ?

Ví dụ 3: Giải phương trình:

$$x+79-(2x+47)\sqrt{x-2}-2(x+19)\sqrt{x+2}+31\sqrt{x^2-4}=0$$

Bước 1: Tìm nghiệm: $\begin{cases} A=13.16656315 \\ B=2.4334368 \\ X=\dfrac{17}{4} \end{cases}$

Bước 2: Tìm nhân tử $\left(\sqrt{x-2}+u\sqrt{x+2}+v\right)$

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{78}{5} \\ AB=\dfrac{801}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-\dfrac{\sqrt{A-2}-\sqrt{B-2}}{\sqrt{A+2}-\sqrt{B+2}}=-\dfrac{3}{2} \\ v=-\sqrt{A-2}-u\sqrt{A+2}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nhân tử là: $\left(\sqrt{x-2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{x+2}+\dfrac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-2}-3\sqrt{x+2}+5\right)$

Bước 3: Chia biểu thức:

$$\frac{x+79-(2x+47)\sqrt{x-2}-2(x+19)\sqrt{x+2}+31\sqrt{x^2-4}}{2\sqrt{x-2}-3\sqrt{x+2}+5}=U\sqrt{x-2}+V\sqrt{x+2}+T\sqrt{x^2-4}+\text{W}$$

Ta được:

- $U = \dfrac{A - B + C - D}{4\sqrt{x-2}} = -9$
- $V = \dfrac{A + B - C - D}{4\sqrt{x+2}} = -3$
- $T = \dfrac{A - B - C + D}{4\sqrt{x^2-4}} = 2$
- $W = \dfrac{A + B + C + D}{4} = 2x + 5$

Vậy:

$$\frac{x + 79 - (2x + 47)\sqrt{x-2} - 2(x + 19)\sqrt{x+2} + 31\sqrt{x^2-4}}{2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+2} + 5} = -9\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x^2-4} + 2x + 5$$

Bước 4: Tiếp tục tìm nghiệm phương trình $-9\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x^2-4} + 2x + 5 = 0$

Bước 5: Tìm nhân tử $\left(\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x+2} + 7\right)$

Bước 6: Chia biểu thức :

$$-9\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x^2-4} + 2x + 5 = \left(\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x+2} + 7\right)\left(-\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} - 1\right)$$

Kết luận: $\left(2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+2} + 5\right)\left(\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x+2} + 7\right)\left(-\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} - 1\right)$

Ví dụ 4: Giải phương trình:

$$x^3 - 2x^2 + 10x - 6 - 2(x + 1)\sqrt{x^3-1} + \left(x^2 - 8x + 10\right)\sqrt{x-1} = 0$$

Bước 1: Tìm nghiệm: $\begin{cases} A = 4 - \sqrt{6} \\ B = 4 + \sqrt{6} \end{cases}$

Bước 2: Gọi nhân tử: $\left(\sqrt{x^2+x+1} + u\sqrt{x-1} + v\right)$ ta được:

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\sqrt{A^2+A+1} - \sqrt{B^2+B+1}}{\sqrt{A-1} - \sqrt{B-1}} = -3 \\ v = -\sqrt{A^2+A+1} - u\sqrt{A-1} = 0 \end{cases}$$

Nhân tử là: $\left(\sqrt{x^2+x+1} - 3\sqrt{x-1}\right)$

Bước 3: Chia biểu thức:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 10x - 6 - 2(x + 1)\sqrt{x^3-1} + (x^2 - 8x + 10)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2+x+1} - 3\sqrt{x-1}} = U\sqrt{x^2+x+1} + V\sqrt{x-1} + T\sqrt{x^3-1} + \text{W}$$

Ta có:

$$\begin{cases} U = \dfrac{A - B + C - D}{4\sqrt{x^2+x+1}} = x \\ V = \dfrac{A + B - C - D}{4\sqrt{x-1}} = x - 2 \\ T = \dfrac{A - B - C + D}{4\sqrt{x^3-1}} = 1 \\ \text{W} = \dfrac{A + B + C + D}{4} = 3x - 3 \end{cases}$$

Kết luận:

$$\begin{gathered}x^3-2x^2+10x-6-2(x+1)\sqrt{x^3-1}+\left(x^2-8x+10\right)\sqrt{x-1}=0\\ \Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+x+1}-3\sqrt{x-1}\right)\left(x\sqrt{x^2+x+1}+(x-2)\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3-1}+3x-3\right)=0\end{gathered}$$

Tiếp tục, ta thấy: $x\sqrt{x^2+x+1}+(x-2)\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3-1}+3x-3>0$ nên vô lý.

Bài toán được giải quyết.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}=0$$

Hướng dẫn:

Bước 1: Tìm nghiệm ta được 2 nghiệm là: $\begin{cases} X_1=\dfrac{24}{25}\\ A=-0.90383671\end{cases}$

- Đổi dấu trước căn của $\sqrt{1-x}$ ta được:

$$15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}=0$$

Phương trình này có 2 nghiệm là: $\begin{cases} B=0.663836717\\ C=-0.65218961\end{cases}$

- Đổi dấu trước căn của $\sqrt{1+x}$ ta được:

$$15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}=0$$

Phương trình này vô nghiệm.

- Đổi dấu trước căn của $\sqrt{1-x}$ và $\sqrt{1+x}$ ta được:

$$15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}=0$$

Phương trình này có 2 nghiệm là: $\begin{cases} X_2=0\\ X_3=-\dfrac{24}{25}\end{cases}$

Thành thử thấy $A+B=-\dfrac{6}{25}\in\mathbb{Q}$

Bước 2: Tìm nhân tử $\left(\sqrt{1-x}+u\sqrt{1+x}+v\right)$ chứa nghiệm A bằng cách:

$$\begin{cases} u=-\dfrac{\sqrt{1-A}+\sqrt{1-B}}{\sqrt{1+A}-\sqrt{1+B}}=2\\ v=-\sqrt{1-A}-u\sqrt{1+A}=-2\end{cases}$$

Vậy nhân tử là: $\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)$

Bước 3: Tìm nhân tử $\left(\sqrt{1-x}+u\sqrt{1+x}+v\right)$ chứa nghiệm $X_1=\dfrac{24}{25}$ bằng cách:

$$\begin{cases} \sqrt{1-\dfrac{24}{25}}+u\sqrt{1+\dfrac{24}{25}}+v=0\\ -\sqrt{1-0}-u\sqrt{1+0}+v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=-\dfrac{1}{2}\\ v=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)$$

Hoặc:

$$\begin{cases} \sqrt{1-\dfrac{24}{25}}+u\sqrt{1+\dfrac{24}{25}}+v=0 \\ -\sqrt{1+\dfrac{24}{25}}-u\sqrt{1-\dfrac{24}{25}}+v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ v=\dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}+6\right)$$

Bước 4:

Cách 1: Chia biểu thức:

$$\frac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)} = U\sqrt{1-x}+V\sqrt{1+x}+T\sqrt{1-x^2}+W$$

Lần lượt CALC cho X = 0.001 và lưu:

$$\begin{cases} \dfrac{15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)} \to A=-0.6002499... \\ \dfrac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(-\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(-2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)} \to B=-2.0035006... \\ \dfrac{15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}-2\right)\left(2\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+1\right)} \to C=-4.0034996.. \\ \dfrac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(-\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}-2\right)\left(-2\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+1\right)} \to D=-4.003499... \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} U=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{1-X}}=-1 \\ V=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{1+X}}=0 \\ T=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{1-X^2}}=-1 \\ \text{W}=\dfrac{A+B+C+D}{4}=-4.003=-4-3x \end{cases}$$

Vậy:

$$\frac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)} = -\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}-4-3x$$

Cách 2: Chia biểu thức:

$$\frac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}+6\right)} = U\sqrt{1-x}+V\sqrt{1+x}+T\sqrt{1-x^2}+W$$

Lần lượt CALC cho X = 0.001 và lưu:

$$\begin{cases} \dfrac{15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}+6\right)} \to A=-2.000999... \\ \dfrac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}-4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(-\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(-5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}+6\right)} \to B=-1.001500... \\ \dfrac{15x^2+19x+8+(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}+(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}-2\right)\left(5\sqrt{1-x}+5\sqrt{1+x}+6\right)} \to C=-1.000500.. \\ \dfrac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(-\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}-2\right)\left(-5\sqrt{1-x}+5\sqrt{1+x}+6\right)} \to D=-0.001000... \end{cases}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} U=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{1-X}}=-\dfrac{1}{2} \\ V=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{1+X}}=-\dfrac{1}{2} \\ T=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{1-X^2}}=0 \\ \text{W}=\dfrac{A+B+C+D}{4}=-1.001=-1-x \end{cases}$$

Vậy:

$$\frac{15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2}}{\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(-5\sqrt{1-x}+5\sqrt{1+x}+6\right)} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x}-\frac{1}{2}\sqrt{1+x}-1-x$$

Kết luận:

$$\begin{aligned} &15x^2+19x+8-(9x+10)\sqrt{1-x}+4(3x+4)\sqrt{1+x}-(5x+14)\sqrt{1-x^2} \\ &=-\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}+4+3x\right) \\ &=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x}+2\sqrt{1+x}-2\right)\left(5\sqrt{1-x}-5\sqrt{1+x}+6\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+1+x\right) \end{aligned}$$

Nhận xét: Vậy với những bài toán có nghiệm bội thì sao ?

Tôi có một bổ đề cực kỳ ngắn gọn để kiểm tra phương trình có nghiệm bội kép hay bội ba, bội bốn, ... Bạn đọc quan tâm có thể xem chi tiết ở phần nâng cao.

Ví dụ 6: Giải phương trình:

$$7x^2+22-4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$$

Hướng dẫn:

Bước 1: Tìm nghiệm ta được nghiệm là: $x=5$.

Bước 2: Đổi dấu trước căn ta được:

- $7x^2+22+4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}+6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm.
- $7x^2+22-4\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+4}+6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm.
- $7x^2+22+4\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$ vô nghiệm.

Bước 3: Xác định nghiệm bội

Ta có:

$$\lim_{x\to5}\frac{7x^2+22-4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}}{x-5}=0$$
$$\lim_{x\to5}\frac{7x^2+22-4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}}{(x-5)^2}=\frac{97}{96}$$

Vậy bài toán này có nghiệm bội kép $x=5$

Bước 4: Tìm nhân tử chứa nghiệm bội kép: $\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+4}+b\right)$

Ta có:

$$a=-\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x-1}\right)\big|_{x=5}}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+4}\right)\big|_{x=5}}=-\frac{3}{2}\Rightarrow b=\frac{5}{2}\Rightarrow\left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}+5\right)$$

Chia biểu thức:

$$\frac{7x^2+22-4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}+5}=U\sqrt{x-1}+V\sqrt{x+4}+T\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}+\mathrm{W}$$

Ta CALC cho $X=1000$ và tính:

$$\begin{cases}A=\text{-36910.33046}\\B=\text{-84875.59149}\\C=79676.78400\\D=26904.33799\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{x-1}}=796.8=\dfrac{3984}{5}=\dfrac{4x-16}{5}\\V=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{x+4}}=-1801.8=-\dfrac{9009}{5}=-\dfrac{9x+9}{5}\\T=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}}=-1.2=-\dfrac{6}{5}\\\mathrm{W}=\dfrac{A+B+C+D}{4}=-3801.2=-\dfrac{19006}{5}=-\dfrac{19x+6}{5}\end{cases}$$

Kết luận:

$$7x^2+22-4\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}-6x\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left(2\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+4}+5\right)\left(4(x-4)\sqrt{x-1}-9(x+1)\sqrt{x+4}-6\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}-19x-6\right)=0$$

Dễ thấy $4(x-4)\sqrt{x-1}-4(x+1)\sqrt{x+4}<0$

Vậy bài toán được giải quyết.

Chắc bạn đọc đã có thể sử dụng công thức U, V, T, W để phân tích nhân tử một số bài toán khó rồi. Bạn đọc có thể cùng tôi thực hành những bài toán sau :

Ví dụ 7: Giải bất phương trình:

$$\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+(x-2)\sqrt{x+1}\ge3x^2-9x+2$$

Hướng dẫn: $BPT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(2x+1+x\sqrt{x+1}-3\sqrt{x-1}-2\sqrt{x^2-1}\right)\ge0$

Ví dụ 8: Giải bất phương trình: (Đề thi thử lần 1 – THPT Chuyên ĐH Vinh - 2016)

$$x^2+4\sqrt{x+2}\le x+2\left(1+\sqrt{x^2+3}\right)$$

Hướng dẫn: $BPT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+3}-3\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+3}-1\right)\ge 0$

Ví dụ 9: Giải phương trình:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x^3-x^2+4x+1=0$$

Hướng dẫn:

$$PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-3\right)$$
$$\times\left[\left(-x^2+3x+10\right)\sqrt{x+2}+\left(x^2+6x+8\right)\sqrt{3-x}+(3x+6)\sqrt{x+2}\sqrt{3-x}+6x+14\right]=0$$

Ví dụ 10: Giải phương trình:

$$2x^3+3x^2+1=2x^2\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{3x^2+1}$$

Hướng dẫn: $PT\Leftrightarrow\dfrac{1}{9}\left(\sqrt{3x^2+1}-1\right)\left(2\sqrt{x^2+3x}-2x-3\right)\left(2\sqrt{x^2+3x}-3\sqrt{3x^2+1}+2x\right)=0$

Ví dụ 11: Giải phương trình:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}}$$

Hướng dẫn:

$$PT\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)^3=3x-13$$
$$\Leftrightarrow\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+1}+3\right)\left(13\sqrt{x-2}-22\sqrt{x+1}+16\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}-16x-19\right)=0$$

Ví dụ 12: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2+9x-1}+x\sqrt{11-3x}=2x+3$$

Hướng dẫn:

$$PT\Rightarrow x^2+9x-1=\left(x\sqrt{11-3x}-2x-3\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{11-3x}-1\right)\left(\sqrt{11-3x}-3\right)\left(x^2+7+2\sqrt{11-3x}\right)=0$$

Ví dụ 13: Giải phương trình:

$$\sqrt{7x^2+20x-86}+x\sqrt{-x^2-4x+31}=3x+2$$

Hướng dẫn:

$$PT\Rightarrow\left(x\sqrt{-x^2-4x+31}-3x-2\right)^2=7x^2+20x-86$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{-x^2-4x+31}-4\right)\left(\sqrt{-x^2-4x+31}-1\right)\left(\sqrt{-x^2-4x+31}+x^2+7\right)=0$$

Ví dụ 14: Giải phương trình:

$$x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$$

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow \frac{1}{18}\left(4\sqrt{x+3}+\sqrt{3-2x}-9\right)\left(4\sqrt{x+3}-\sqrt{3-2x}+27\right)=0$

Ví dụ 15: Giải phương trình:

$$2\sqrt{x+2}-8\sqrt{2-x}+8\sqrt{4-x^2}+15x-34=0$$

Hướng dẫn: $PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{x+2}-4\sqrt{2-x}-2\right)=0$

Ví dụ 16: Giải bất phương trình:

$$\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+(x-2)\sqrt{x+1}\le 3x^2-9x+2$$

Hướng dẫn: $BPT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(3\sqrt{x-1}-x\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}-2x-1\right)\ge 0$

Chúng ta đã đi qua gần cuối đoạn đường phân tích nhân tử. Tuy nhiên, vẫn còn một số thứ cần phải làm rõ:

E. Nâng Cao

Có thể bạn đọc đã thấy, việc tìm nghiệm giúp chúng ta tìm được nhân tử. Các trường hợp có 2 nghiệm vô tỷ, 1 nghiệm vô tỷ, 2 nghiệm hữu tỷ thì đã có công thức. Vậy còn trường hợp 1 nghiệm hữu tỷ thì tính sao ? Liệu nó có thể phân tích thành nhân tử được ?

Tôi tạm chia trường hợp 1 nghiệm hữu tỷ duy nhất $k_1 \in \mathbb{Q}$ thành các trường hợp nhỏ hơn như sau:

a) Sau khi đổi dấu, tìm được nghiệm hữu tỷ $k_2 \in \mathbb{Q}$ Trường hợp cơ bản này đã có công thức ở trên rồi. Bạn đọc có thể xem lại.

b) Sau khi đổi dấu, không tìm được nghiệm hữu tỷ $k_2 \in \mathbb{Q}$ nhưng tìm được 2 nghiệm vô tỷ k_3, k_4 sao cho $\begin{cases} k_3+k_4 \in \mathbb{Q} \\ k_3k_4 \in \mathbb{Q} \end{cases}$ Khi đó, nhân tử của bài toán sẽ là đổi dấu của nhân tử chứa hai nghiệm k_3, k_4

Ví dụ 1: Giải phương trình $3x^2-7x-8-(3x-4)\sqrt{x^2-x-1}=0$

Ta có:

Phương trình $3x^2-7x-8-(3x-4)\sqrt{x^2-x-1}=0$ có nghiệm duy nhất $x=-\frac{2}{3}$

Phương trình $3x^2-7x-8+(3x-4)\sqrt{x^2-x-1}=0$ có 2 nghiệm $k_1=2.55396793$ và $k_2=-5.22063459$

Từ đó ta tìm được nhân tử của bài toán này là $\left(2\sqrt{x^2-x-1}-x+6\right)$

Kết luận: $PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x-1}-x-1\right)\left(2\sqrt{x^2-x-1}-x+6\right)=0$

c) Phương trình có nghiệm bội $x=k_1$

Để kiểm tra nghiệm bội, chúng ta dùng bổ đề dưới đây:

Nếu $\lim \frac{f(x)}{(x-k)^n}=0$ thì $f(x)$ có nghiệm $x=k$ bội $n+1$

Ví dụ 2: Giải phương trình $2x^4+2x^3+2x^2-2x-1=\left(2x^3+2x^2-1\right)\sqrt{2x^2-1}$

Ta có:

Phương trình $2x^4+2x^3+2x^2-2x-1-\left(2x^3+2x^2-1\right)\sqrt{2x^2-1}=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Phương trình $2x^4+2x^3+2x^2-2x-1+\left(2x^3+2x^2-1\right)\sqrt{2x^2-1}=0$ có 2 nghiệm $x_1=0.7178...$ và $x_2=-2.3098...$

Hai nghiệm này có tổng, tích không phải hữu tỷ nên không làm ăn được gì.

Kiểm tra nghiệm bội :

Ta có: $\lim \dfrac{2\,x^4+2\,x^3+2\,x^2-2\,x-1-\left(2\,x^3+2\,x^2-1\right)\sqrt{2\,x^2-1}}{x-1}=0$

Ta có: $\lim \dfrac{2\,x^4+2\,x^3+2\,x^2-2\,x-1-\left(2\,x^3+2\,x^2-1\right)\sqrt{2\,x^2-1}}{(x-1)^2}=-5$

Kết luận: Phương trình đã cho có bội kép $x=1$

Vậy tìm nhân tử chứa bội kép như thế nào?

Giả sử bài toán có nhân tử $\left(\sqrt{2\,x^2-1}+ax+b\right)$ thì đạo hàm theo x của $\sqrt{2\,x^2-1}+ax+b$ tại $x=1$ phải bằng 0

Tức $a=-\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^2-1}\right)\Big|_{x=1}=-2$ Từ đó ta có thể tìm được $b=1$

Vậy nhân tử của bài toán này là $\left(\sqrt{2\,x^2-1}-2x+1\right)$

Tiếp theo là phân tích thành nhân tử nó, ta được đáp án như sau:

$$PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{2\,x^2-1}-2\,x+1\right)\left(\left(x^2+2\,x+1\right)\sqrt{2\,x^2-1}+x^2\right)=0$$

Bài toán được giải quyết.

d) Phương trình dạng một căn thức $\sqrt{ax+b}$

Điều đặc biệt của phương trình dạng này là luôn có nhân tử $\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ak_1+b}\right)$

Ví dụ 3: Giải phương trình $x^2+2\,x+9-\left(x^2-2\,x+9\right)\sqrt{2\,x+1}=0$

Ta có: Phương trình $x^2+2\,x+9-\left(x^2-2\,x+9\right)\sqrt{2\,x+1}=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$

Ta có: Phương trình $x^2+2\,x+9+\left(x^2-2\,x+9\right)\sqrt{2\,x+1}=0$ vô nghiệm

Kiểm tra nghiệm bội: Không thỏa mãn.

Tuy nhiên nhờ nghiệm $x=0$ nên có thể xác định luôn phương trình này có nhân tử $\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

Kết luận: $PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{2\,x+1}-1\right)\left(x^2-2\,x+7-2\sqrt{2\,x+1}\right)=0$

e) Phương trình dạng nhiều căn thức $A\sqrt{ax+b}+B\sqrt{ax+c}+C\sqrt{(ax+b)(ax+c)}+D=0$

Tương tự như trên, phương trình này luôn có nhân tử dạng $\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax+c}+p\right)$ hoặc $\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax+c}\right.$

Ví dụ 4: Giải phương trình $\sqrt{x+1}+x\sqrt{x-2}-x^2+4=0$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x=3$ vì vậy nên nó luôn có nhân tử $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1\right)$ hoặc $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3\right)$

Kết luận:

$$PT\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+(x+3)\sqrt{x-2}+(x+2)\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}+x^2-1\right)=0$$

$$PT\Leftrightarrow-\frac{1}{6}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3\right)\left(3\sqrt{x+1}+3\,(x+1)\sqrt{x-2}+(x+2)\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}-x^2+7\right)=0$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $3x\sqrt{x-1}-(x+1)\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}+2=0$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x=2$

Kết luận:

$$PT\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+1\right)\left(x\sqrt{x-1}+(x-1)\sqrt{x+2}+2x\right)=0$$

$$PT \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3\right)\left(3\sqrt{x+1}+3\left(x+1\right)\sqrt{x-2}+\left(x+2\right)\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}-x^2+7\right)=0$$

Ví dụ 6: Giải phương trình $x^2-4x-6+5x\sqrt{x-1}+5\sqrt{x+2}-\left(3x-1\right)\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}=0$

Phương trình này có nghiệm $x=2$ hoặc $x=\frac{17}{16}$ nhưng vẫn có nhân tử như trên.

Kết luận:

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+2}+5\right)\left(x\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)=0$$

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}+1\right)\left(2x\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2}-\left(x+1\right)\sqrt{x-1}\sqrt{x+2}-x^2-2\right)=0$$

f) Phương trình dạng một căn thức $\sqrt{(ax)^2+bx+c}$

Phương trình này hầu như có nhân tử dạng $\left(\sqrt{(ax)^2+bx+c}-ax+p\right)$ hoặc $\left(\sqrt{(ax)^2+bx+c}+ax+q\right)$

g) Phương trình dạng nhiều căn thức chứa $\sqrt{(ax)^2+bx+c}$ và $\sqrt{(mx)^2+nx+p}$

Phương trình này hầu như có nhân tử dạng $\left(m\sqrt{(ax)^2+bx+c}-a\sqrt{(mx)^2+nx+p}+u\right)$ hoặc $\left(m\sqrt{(ax)^2+bx+c}+a\sqrt{(mx)^2+nx+p}+v\right)$

h) Các dạng còn lại: Phương trình có bậc trong căn lớn hơn bậc hạng tử không chứa căn. Vì bậc của nó bé nên khử căn thức hoặc nhân liên hợp là phương pháp được ưu tiên.

Ngoài ra, chúng ta có thể dùng đạo hàm hoặc đánh giá để chứng minh.

Sau khi đi qua về các trường hợp nghiệm thì một vấn đề đau đầu nữa mà chúng ta có thể mắc phải đó là chứng minh phần còn lại (sau khi phân tích nhân tử) vô nghiệm. Bạn đọc có thể tham khảo cách sử dụng S.O.S của tôi để giải quyết nó.

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$3-x^3+\left(x^3-2x-1\right)\sqrt{2-x^2}=0$$

Lời giải của tôi vô cùng ngắn gọn như sau:

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-x^2}+x-2\right)\left(x^3+x^2-x-4+\left(x^2+x-1\right)\sqrt{2-x^2}\right)=0$$

Ta luôn có:

$$x^3+x^2-x-4+\left(x^2+x-1\right)\sqrt{2-x^2}=$$
$$-\frac{1}{3}\left(\left(3x+5+3\sqrt{2-x^2}\right)\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{x}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{13}{36}\right)<0$$

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Làm thế nào để tôi có được lời giải như trên ?

Ta kiếm cách chứng minh

$$f\left(x\right)=x^3+x^2-x-4+\left(x^2+x-1\right)\sqrt{2-x^2}<0$$

Đây là một bài toán siêu chặt nên điểm rơi của chúng ta phải lấy gần đúng nhất có thể ...

Bước 1: Tìm điểm rơi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.3692...$

Bước 2: Tìm nhân tử chứa điểm rơi:

$$x = 1.3692... \Rightarrow \sqrt{2-x^2} = 0.3537... \Rightarrow \sqrt{2-x^2} \approx \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\sqrt{2-x^2} - \frac{1}{3}\right)^2$$

Bước 3: Chia biểu thức: $g(x) = \dfrac{x^3+x^2-x-4+(x^2+x-1)\sqrt{2-x^2}}{\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{3}\right)^2}$

Vào Mode 2, nhập biểu thức và CALC cho $x = 1000$ ta được:

$$g(x) = -1001.66799 - 1000.33233I$$
$$\Rightarrow 3g(x) = -3005.0039 - 3000.9969I$$
$$\Rightarrow 3g(x) \approx -3x - 5 - 3\sqrt{2-x^2}$$

Bước 4: Tìm dư

$$3\left(x^3+x^2-x-4+(x^2+x-1)\sqrt{2-x^2}\right) + \left(\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{3}\right)^2\left(3x+5+3\sqrt{2-x^2}\right)$$
$$= \frac{10}{3}x - \frac{49}{9} + x\sqrt{2-x^2}$$

Bước 5: Chứng minh $h(x) = \frac{10}{3}x - \frac{49}{9} + x\sqrt{2-x^2} < 0$ Cách làm gần tương tự như trên ...

- **Bước 5.1:** Điểm rơi $x = 1.3344...$
- **Bước 5.2:** Mối liên hệ giữa x và $\sqrt{2-x^2}$ là $\sqrt{2-x^2} = 0.4683 \approx \frac{x}{3}$
- **Bước 5.3:** Khử căn bằng BĐT cauchy hoặc S.O.S:

$$\frac{10}{3}x - \frac{49}{9} + x\sqrt{2-x^2} + \frac{3}{2}\left(\sqrt{2-x^2}-\frac{x}{3}\right)^2 = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{22}{9} = -\frac{4}{3}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{13}{36} < 0$$

Đó chính là lý do vì sao tôi có lời giải S.O.S đẹp như vậy ...

Đây là cách làm tổng quát cho những bài toán siêu chặt, còn nếu bài toán "lỏng lẻo" hơn một tí thì có thể không cần phải lấy gần đúng ...

Ví dụ như ta lấy điểm rơi $x = 1$ thì nhân tử nghiệm kép của nó là: $\left(\sqrt{2-x^2}+x-2\right)$

Khi đó:

$$x^3+x^2-x-4+(x^2+x-1)\sqrt{2-x^2}$$
$$= \left(\sqrt{2-x^2}+x-2\right)\left(x^2+2x-\sqrt{2-x^2}\right) + 3x - 2 - 3\sqrt{2-x^2}$$
$$= \left(\sqrt{2-x^2}+x-2\right)\left(x^2-1-3\sqrt{2-x^2}\right) + 2(2x-3)\sqrt{2-x^2}$$

Tiếc là nó không phải lúc nào cũng âm vì bài toán này quá chặt.

Còn với những bài lỏng hơn như thì chúng ta làm như sau :

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$3x^3 + 6x - 1 + (8x+1)\sqrt{x^2+1} = 0$$

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow -\left(\sqrt{x^2+1}-2x-1\right)\left(2x^2+x+3+(x+4)\sqrt{x^2+1}\right)$$

Do đó, ta cần chứng minh $f(x)=2x^2+x+3+(x+4)\sqrt{x^2+1}>0$

Ta tìm điểm rơi bằng cách lấy đạo hàm, ta được $x_0=-0.2675918...$

Ta cần lấy: $f(x)-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x+a\right)^2}{2}$ để mất căn.

Thế điểm rơi vào, ta được $a\approx -0.76759187 \Rightarrow a=-1$

Tóm lại ta được $f(x)-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)^2}{2}=x^2+2x+2+5\sqrt{x^2+1}>0$

Ví dụ 3: Giải phương trình

$$x^4+x^2+10x-19+\left(x^3-7x+13\right)\sqrt{x^2+x-1}=0$$

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+2\right)\left(x^2-2x+7+(x-2)\sqrt{x^2+x-1}\right)$$

Do đó, ta cần chứng minh $f(x)=x^2-2x+7+(x-2)\sqrt{x^2+x-1}>0$

Ta tìm điểm rơi bằng cách lấy đạo hàm, ta được $x_0=1.0845346...$

Ta cần lấy: $f(x)-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-1}+x+a\right)^2}{2}$ để mất căn.

Thế điểm rơi vào, ta được $a\approx -2.207366... \Rightarrow a=-2$

Tóm lại ta được $f(x)-\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-1}+x-2\right)^2}{2}=\dfrac{11-x}{2}$

Tuy nhiên, chúng ta vẫn chưa giải quyết được nó. Lấy điểm rơi chặt hơn với $a=-\dfrac{5}{2}$ ta được:

$$f(x)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x-1}+x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{35}{8}+\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{2}>0$$

Ví dụ 4: Giải phương trình

$$x^2-6x+\frac{37}{3}+(x-4)\sqrt{x+1}=0$$

Ngoài cách làm như trên, chúng ta cũng có thể viết nó dưới dạng tổng các bình phương bằng cách đặt $t=\sqrt{x+1}$ viết phương trình theo t và đưa về phương trình bậc 4. Cách phân tích phương trình bậc 4 thành các tổng bình phương S.O.S tôi cũng đã giới thiệu qua rồi.

Kết luận:

$$x^2-6x+\frac{37}{3}+(x-4)\sqrt{x+1}=\left(x+\frac{\sqrt{x+1}}{2}-\frac{16}{5}\right)^2+\frac{3}{20}\left(\sqrt{x+1}-\frac{8}{3}\right)^2+\frac{47}{75}>0$$

Vẫn còn rất nhiều vấn đề để nói về phương pháp này. Nhưng có lẽ tôi không thể trình bày hết được trong topic này. Ví dụ như :

Ví dụ 5: Giải phương trình

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}=x\left(x^2+3x+3+4\sqrt{x^2+1}\right)+1$$

Cách 1:

$$PT \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\sqrt{x^2+1}\right)}{3x-1} \times \left[2(x+1)^2\sqrt{x^2+1}+(x+1)^2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-2x+5}+7x^2-4x+5\right]=0$$

Cách 2:

$$PT \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-2\sqrt{x^2+1}-x-1\right) \times \left(U\sqrt{x^2-2x+5}+V\sqrt{x^2+1}+T\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-2x+5}+W\right)=0$$

Với

$$\begin{cases} U = x^3 - x^2 + 2x - 2 \\ V = x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \\ T = -x^2 + x - 2 \\ W = -x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

Hy vọng trong bài post này, bạn đọc có thể sử dụng chiếc máy tính bỏ túi của mình để giải quyết những bài toán liên quan đến phân tích thành nhân tử. Chuyên đề được viết trong 11 giờ (từ 18h đến 5h) nên không khỏi những sai sót. Mọi góp ý, thắc mắc vui lòng liên hệ tới SĐT: 096.573.48.93 hoặc Facebook: Bùi Thế Việt.

Dưới đây là một số bài tập tự luyện để bạn đọc tham khảo.

https://drive.google.com/file/d/0B27JsovgpmpLNXQ2S2E4ai1HNzA/view
https://drive.google.com/file/d/0B27JsovgpmpLQVZ4Z3dNbXVHcG8/view

Tham khảo, chia sẻ xin ghi rõ nguồn Bùi Thế Việt (nthoangcute). Xin cảm ơn.